ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espaces vectoriels normés

I.1. Normes sur un espace vectoriel

Déf 1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

a) $\forall\, x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (*positivité*).

b) $\forall\, x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ (*séparation*).

c) $\forall\, x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*homogénéité*).

d) $\forall\, (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Rem : dans la propriété c), $|\lambda|$ désigne la *valeur absolue* de λ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et le *module* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Rem: Le plus souvent, une norme sur E est notée $\|\cdot\|_E$ ou simplement $\|\cdot\|$.

Exemples

1. La valeur absolue dans $\mathbb{R}$, le module dans $\mathbb{C}$, sont des normes.
2. Si E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$, la norme associée à ce produit scalaire (c'est-à-dire définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$) munit E d'une structure d'espace vectoriel normé.
(*Les propriétés ont toutes été démontrées dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels*)

Propriétés:

1. Si N est une norme sur E, on a en fait l'équivalence : $\forall\, x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. Si N est une norme sur E, il est facile de montrer par récurrence sur n que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \forall\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ N\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, N(x_i)\,.$$

3. Si $(E, \|\ \ \|)$ est un espace vectoriel normé, on a :

$$\forall\, (x, y) \in E^2,\ \Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \leqslant \|x - y\|\,.$$

Déf 2:

Un vecteur x d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \ \|)$ est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Rem: À tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, on peut toujours associer un vecteur unitaire : $\dfrac{x}{\|x\|}$.

I.2. Normes usuelles sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Lemme:

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel $k \geqslant 0$:

$$\sup(kA) = k \sup A.$$

(kA désigne l'ensemble $\{kx \mid x \in A\}$).

Rem: Ce résultat figure désormais explicitement au programme, et peut donc être utilisé directement.

Théorème 1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, on pose :

$$\textbf{a)}\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \textbf{b)}\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \textbf{c)}\ \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\ .$$

On définit ainsi trois normes sur E.

I.3. Normes usuelles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2. Il est généralement rapporté à la base canonique (E_{ij}) : si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$, les a_{ij} sont les coordonnées de M dans la base canonique (E_{ij}).
On peut donc comme ci-dessus définir trois normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$:

$$\textbf{a)}\ \|A\|_1 = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right| \qquad \textbf{b)}\ \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|^2} \qquad \textbf{c)}\ \|A\|_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|\ .$$

Déf 3:

On dit qu'une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une <u>norme d'algèbre</u> si

$$\forall\,(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

La norme $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme d'algèbre : il suffit par exemple de considérer $A = B = J$ où $J = (1)$.

Prop 1:

La norme $\|\ \|_1$ est une norme d'algèbre.

Rem: on peut démontrer que la norme $\|\ \|_2$ est aussi une norme d'algèbre, mais cela n'est pas immédiat.

Prop 2:

La norme N définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\forall\,A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ N(A) = n\,\|A\|_\infty$$

est une norme d'algèbre.

Prop 3:

L'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\forall\,A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ N(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|\right)$$

est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.4. Normes usuelles sur $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$

Théorème 2:

Pour toute $f \in \mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$ (avec $a < b$), on peut poser :

a) $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ **b)** $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$ **c)** $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a;b]} |f(t)|$.

On définit ainsi trois normes sur $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$.

Rem : $|f(t)|$ désigne la *valeur absolue* de $f(t)$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, et le *module* si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Rem: Dans $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$, la norme $\|\ \|_\infty$ s'appelle la norme de la convergence uniforme.

I.5. Distance associée à une norme

Déf 4:

Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Si $(x,y)\in E^2$, on appelle distance de x à y le réel :

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Propriétés:

1. $\forall\,(x,y)\in E^2$, $d(x,y)\geqslant 0$.
2. $\forall\,(x,y)\in E^2$, $d(x,y)=d(y,x)$.
3. $\forall\,(x,y)\in E^2$, $d(x,y)=0 \iff x=y$.
4. $\forall\,(x,y,z)\in E^3$, $\big|d(x,y)-d(y,z)\big| \leqslant d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

Déf 5:

Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E non vide, et $x\in E$.
L'ensemble $\{\|x-a\| \mid a\in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0 ; elle admet donc une borne inférieure, appelée distance de x à A, et notée $d(x,A)$:

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Remarques

1. En général, le réel $d(x,A)$ n'est pas un *minimum*, c'est-à-dire que la borne inférieure n'est pas nécessairement atteinte.
   Exemple : Dans $\mathbb{R}$, prendre $x=0$ et $A=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$.
2. La distance de x à A peut être nulle sans que x appartienne à A.
   Exemple : le même que ci-dessus.
3. Même si $d(x,A)$ est atteinte en un point, ce point n'est pas nécessairement unique.
   Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne usuelle, considérer un cercle et son centre.

I.6. Boules et sphères

Déf 6:

Soit $(E, \|\ \ \|)$ un espace vectoriel normé, a un vecteur de E et r un réel positif.
On appelle :

- boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E\ ,\ d(a,x) < r\} \ = \ \{x \in E\ ,\ \|x-a\| < r\}.$$
- boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E\ ,\ d(a,x) \leqslant r\} \ = \ \{x \in E\ ,\ \|x-a\| \leqslant r\}.$$
- sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E\ ,\ d(a,x) = r\} \ = \ \{x \in E\ ,\ \|x-a\| = r\}.$$

On parle de boule unité ou de sphère unité dans le cas $a = 0_E$ et $r = 1$.

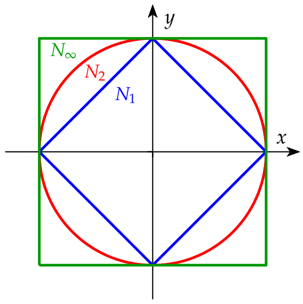
Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue : $\mathcal{B}(a,r) =]a-r\,;a+r[$, $\mathcal{B}_f(a,r) = [a-r\,;a+r]$, $\mathcal{S}(a,r) = \{a-r, a+r\}$.
2. Dessin des boules unités pour les trois normes usuelles de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\right\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

$$\mathcal{B}_\infty = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\left(|x|, |y|\right) \leqslant 1\right\}$$



Déf 7: *Voisinages*

Soit E un espace vectoriel normé, et $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,r) \subset V$.
On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Rem: Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}$, on définit les voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme les parties de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ (resp $]-\infty\,;a[$).

Déf 8: *Parties convexes*

Une partie A d'un espace vectoriel est dite convexe si, pour tout $(x,y) \in A^2$, le segment $[x\,;y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0\,;1]\}$ est inclus dans A.

Prop 4:

Une boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe.

Déf 9: *Parties bornées*

Soit $(E, \|\ \ \|)$ un espace vectoriel normé. Une partie A de E est dite bornée si :
$$\exists\, M \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ \forall\, x \in A\ ,\ \|x\| \leqslant M$$
Cela équivaut à : $A \subset \mathcal{B}_f(0, M)$.

I.7. Comparaison de normes

Déf 10:

Soient (N_1, N_2) deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si :

$$\exists\, \alpha > 0\,,\ \exists\, \beta > 0 \text{ tels que } \forall\, x \in E\,,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

(c'est-à-dire que les rapports $\frac{N_1}{N_2}$ et $\frac{N_2}{N_1}$ sont bornés sur $E \setminus \{0\}$.)

Prop 5:

C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Exemples

1. Comparaison des trois normes usuelles dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, on a :

   $$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n \cdot \|x\|_\infty \quad , \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\, \|x\|_2 \,.$$

   Ces trois normes sont donc deux à deux équivalentes.

2. Comparaison des trois normes usuelles dans $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$

   Pour toute $f \in \mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{K})$ (avec $a < b$), on a :

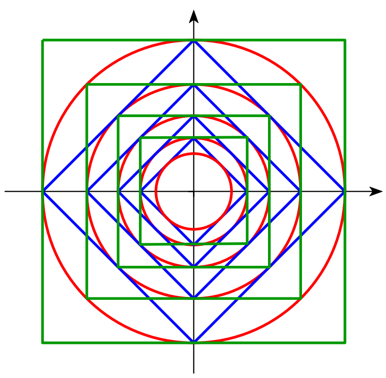
   $$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f\|_2 \quad , \quad \|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty \quad , \quad \|f\|_1 \leqslant (b-a)\, \|f\|_\infty \,.$$

   Cependant, ces trois normes sont deux à deux **non équivalentes**, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $f_n \colon t \mapsto \left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$: on vérifie que les suites de termes généraux $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2}$, $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1}$ et $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}$ tendent vers $+\infty$ avec n, donc les rapports $\frac{\|\ \|_\infty}{\|\ \|_2}$, $\frac{\|\ \|_2}{\|\ \|_1}$ et $\frac{\|\ \|_\infty}{\|\ \|_1}$ ne sont pas bornés.

Prop 6:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur E.
Si les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors toute boule ouverte pour l'une de ces deux normes contient une boule ouverte de même centre pour l'autre norme.

Illustration



Corollaire 6.1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N_1, N_2 deux normes sur E et $a \in E$.
Si les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors l'ensemble $\mathscr{V}(a)$ des voisinages de a est le même pour les deux normes.

Prop 7:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur E.
Si les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors toute partie bornée pour l'une est bornée pour l'autre .

Rem : Lorsque E est de dimension infinie, une partie peut être bornée pour une norme et non bornée pour une autre !
Considérer pour cela : $E = \mathscr{C}([0\,;1],\mathbb{R})$, et $A = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $f_n : t \mapsto nt^n$. Alors A est bornée pour la norme N_1, mais ne l'est pas pour la norme N_∞.

On a cependant le résultat important suivant :

Théorème 3: (admis)

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

II. Suites dans un espace vectoriel normé

II.1. Suite d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Déf 11:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle suite d'éléments de E toute application
$u : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & u_n \end{array} \right.$, où I est une partie de $\mathbb{N}$. On la note : $(u_n)_{n\in I}$.

Remarques

1. Si I est une partie *finie* de $\mathbb{N}$, la suite est dite finie. Ce cas n'a aucun intérêt ici.
2. Si I est une partie *infinie* de $\mathbb{N}$, I est équipotent à $\mathbb{N}$ (*voir cours de probas*), et on peut donc se limiter au cas $I = \mathbb{N}$, ce que l'on fera par la suite.
3. Ne pas confondre : une suite peut être infinie et ne prendre qu'un nombre fini de valeurs (*ex :* $(-1)^n$).

Prop 8:

L'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans E a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois (« usuelles ») : si $u, v \in E^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$u + v\colon n \longmapsto u_n + v_n$$
$$\lambda.u\colon n \longmapsto \lambda u_n\,.$$

↪ Par la suite, on supposera que E désigne un espace vectoriel normé, et on notera $\|\ \|_E$ sa norme (ou simplement $\|\ \|$ s'il n'y a pas de confusion possible).

II.2. Suite bornée

Déf 12:

Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si son ensemble image est une partie bornée de E, c'est-à-dire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M\,.$$

Rem: La proposition 7 montre que, si une suite est bornée pour une norme, elle l'est aussi pour toute norme *équivalente* ; et l'exemple donné à la suite de cette proposition montre qu'une suite peut être bornée pour une norme sans l'être pour une autre !

Prop 9:

1. L'ensemble $\mathscr{B}(\mathbb{N}, E)$ (noté plutôt $\ell^\infty(E)$) des suites bornées d'éléments de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
2. $\ell^\infty(E)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel normé pour la norme $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } u \in \ell^\infty(E),\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_E\ .$$

II.3. Convergence d'une suite

Déf 13:

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Théorème 4:

Si (u_n) est une suite convergente, le vecteur ℓ précédent est unique.
On l'appelle limite de la suite u, et on note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Remarques

1. Dire que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ peut aussi s'écrire :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$$

ou encore, puisque toute boule ouverte de centre ℓ est un voisinage de ℓ et que tout voisinage de ℓ contient une telle boule :

$$\forall\, V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in V$$

L'intérêt de cette écriture est qu'elle permet de généraliser la définition de la limite au cas d'une suite réelle (u_n) qui tend vers $\pm\infty$. En effet, un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ étant une partie qui contient un intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$, dire que la suite rélle u tend vers $+\infty$ s'écrit donc :

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > A\,.$$

2. Dire que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ signifie aussi que la suite réelle $\|u_n - \ell\|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
3. **On ne change pas la nature d'une suite, ni, pour une suite convergente, sa limite, lorsqu'on remplace la norme par une norme équivalente**.

   Cela découle directement du fait que les ensembles $\mathscr{V}(\ell)$ sont les mêmes pour les deux normes.

   Cela n'est plus forcément le cas lorsqu'on considère deux normes non équivalentes : prendre l'exemple de la suite de fonctions $f_n\colon t \mapsto t^n$, dans $\mathscr{C}([0\,;1], \mathbb{R})$: cette suite converge vers la fonction nulle au sens de la norme $\| \ \|_1$, mais pas au sens de la norme $\| \ \|_\infty$ puisque, pour tout n, $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.

Théorème 5:

Toute suite convergente est bornée.

Rem : Une suite bornée n'est pas forcément convergente ! Exemple : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Théorème 6:

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de E convergentes resp. vers ℓ et ℓ' dans E. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
2. Soit (λ_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$, et (u_n) une suite d'éléments de E convergente vers $\ell \in E$. Alors, la suite $(\lambda_n \cdot u_n)$ converge vers $\lambda \cdot \ell$.

Corollaire 6.1:

L'ensemble des suites convergentes d'éléments de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$, et l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire.

II.4. Suites extraites

Déf 14:

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite de u toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Théorème 7:

Si u est une suite d'éléments de E qui converge vers ℓ, toute suite extraite de u converge, vers la même limite ℓ .

Exemple

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge, puisque les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes de limites différentes.

On a dans certains cas une sorte de réciproque au théorème précédent :

Prop 10:

Soit u une suite d'éléments de E. On suppose que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, vers la *même* limite ℓ.
Alors la suite u converge vers ℓ.

II.5. Cas de la dimension finie

Théorème 8:

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E, et (u_n) une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n peut s'écrire : $u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_{i,n} e_i$ (les $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites coordonnées, à valeurs dans $\mathbb{K}$). Alors :

1. La suite (u_n) est convergente dans E si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, la suite $(u_{i,n})$ est convergente dans $\mathbb{K}$.
2. Et, dans ce cas, si $\ell = \sum\limits_{i=1}^{p} \ell_i e_i = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, on a : $\forall\, i \in [\![1\,;p]\!]$, $\ell_i = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{i,n}$.
(*de façon simplifiée, les coordonnées de la limite sont les limites des coordonnées*).

Cas particulier : $\mathbb{C}$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $(1, \mathrm{i})$ (les coordonnées d'un complexe z dans cette base étant $\mathcal{Re}\,(z)$ et $\mathcal{Im}\,(z)$), on a le corollaire suivant :

Corollaire 8.2:

Pour qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes soit convergente, il faut et il suffit que les deux suites réelles $\left(\mathcal{Re}\,(z_n)\right)_n$ et $\left(\mathcal{Im}\,(z_n)\right)_n$ soient convergentes, et l'on a alors :

$$\mathcal{Re}\,(\lim z_n) = \lim(\mathcal{Re}\,(z_n)) \quad \text{et} \quad \mathcal{Im}\,(\lim z_n) = \lim(\mathcal{Im}\,(z_n))$$

III. Topologie d'un espace vectoriel normé

III.1. Ouverts

Déf 15:

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Une partie Ω de E s'appelle un ouvert si :

– soit : $\Omega = \emptyset$

– soit : pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$.

Propriétés:

1. $\emptyset$ et E sont des ouverts .
2. Une boule ouverte est un ouvert.
3. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.
4. L'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert.

Rem: La dernière propriété tombe en défaut lorsque la famille n'est pas finie.

Considérer par exemple $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n}\right[$.

III.2. Intérieur

Déf 16:

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On dit que $a \in A$ est un point intérieur à A si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A, et se note $\overset{\circ}{A}$.

Notons, que, par définition, on a toujours : $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Propriété: L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et de même rayon.

Exemple

Dans $\mathbb{R}$, puisque tout intervalle d'intérieur non vide contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels, on a :

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} - \mathbb{Q}}} = \emptyset.$$

Prop 11:

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Alors : A est un ouvert $\iff \overset{\circ}{A} = A$.

III.3. Fermés

Déf 17:

On dit qu'une partie F d'un espace vectoriel normé est un fermé si son complémentaire est un ouvert.

Propriétés:

1. $\emptyset$ et E sont des fermés. (*Rem : on peut démontrer que ce sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées de* E).
2. Une boule fermée est un fermé.
3. L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
4. La réunion d'une famille finie de fermés est un fermé.

III.4. Adhérence

Déf 18:

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On dit que $a \in E$ est un point adhérent à A si et seulement si pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}(a,r) \cap A \neq \varnothing$.
L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$.
Notons, que, par définition, on a toujours : $A \subset \overline{A}$.

Rem: Par extension, si $A \subset \mathbb{R}$, on dit que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à A si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R}$, $]a\,;+\infty[\, \cap A \neq \varnothing$ (resp $]-\infty\,;a[\, \cap A \neq \varnothing$). Ainsi, $\pm\infty$ sont adhérents à $\mathbb{R}$.
On note alors $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Propriété: L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon.

Prop 12:

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Alors : A est un fermé $\Longleftrightarrow$ $\overline{A} = A$.

Déf 19:

Soit E un espace vectoriel normé, et $A \subset E$. On dit que A est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$.
Exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Prop 13:

Soit E un espace vectoriel normé, x un élément de E et A une partie non vide de E. Alors :

$$d(x,A) = 0 \iff x \text{ est adhérent à } A\,.$$

III.5. Effet d'un changement de norme

Prop 14:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur E.
Si les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors toute partie ouverte pour l'une est ouverte pour l'autre .

Ainsi, si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur un espace vectoriel normé E, les ouverts pour les deux normes sont les mêmes.
Il en résulte qu'il en est de même pour les notions de fermé, de voisinage, d'intérieur et d'adhérence ; en particulier, dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *de dimension finie*, toutes ces notions sont indépendantes de la norme considérée.

III.6. Lien avec les suites

Théorème 9: Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors :

$$a \in \overline{A} \iff \text{il existe une suite d'éléments } de\ A \text{ qui converge vers } a\,.$$

Théorème 10: Caractérisation séquentielle des fermés

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.
A est un fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans E converge dans A.

Rem : Pour démontrer qu'une partie est fermée, il est bien plus commode d'utiliser la caractérisation séquentielle que la définition initiale (complémentaire d'un ouvert, puis utilisation de boules ouvertes incluses dans...).

Exercices

1. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F est un fermé.
2. Soit S le sous-ensemble de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ formé des matrices *stochastiques*, c'est-à-dire à coefficients positifs ou nuls et telles que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

   Alors S est une partie fermée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

***Corollaire 10.1*:** Caractérisation séquentielle d'une partie dense

> Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors A est une partie dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

Exercice Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Rem : Les 3 exercices précédents sont importants et sont à retenir.
