FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

On considère ici des applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et à valeurs dans un espace vectoriel normé E.

I. Définitions

I.1. Dérivée en un point

Déf 1:

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en t_0 si $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \dfrac{1}{t-t_0}\cdot\big(f(t)-f(t_0)\big)$ existe.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(t_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en t_0.

Remarques

1. Ainsi, dire que f est dérivable en t_0 s'écrit :

$$\exists\,\ell\in E,\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0 \text{ tel que } \forall\, t\in I,\ t\neq t_0 \text{ et } |t-t_0|<\alpha \Longrightarrow \left\|\frac{1}{t-t_0}\cdot\big(f(t)-f(t_0)\big)-\ell\right\|<\epsilon$$

ou encore :

$$\exists\,\ell\in E,\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0 \text{ tel que } \forall\, t\in I,\ t\neq t_0 \text{ et } |t-t_0|<\alpha \Longrightarrow \|f(t)-f(t_0)-(t-t_0)\cdot\ell\|<\varepsilon\,|t-t_0|$$

ou encore :

$$\exists\,\ell\in E \text{ tel que } f(t)\underset{t\to t_0}{=} f(t_0)+(t-t_0)\cdot\ell+\overrightarrow{o}(t-t_0)\,.$$

Cette dernière expression s'appelle un développement limité de f au voisinage de t_0.

De la même façon que pour les fonctions à valeurs réelles, $\overrightarrow{o}(t-t_0)$ désigne une fonction *à valeurs dans* E de la forme $(t-t_0)\,\overrightarrow{\varepsilon}(t)$ où $\lim\limits_{t\to t_0}\overrightarrow{\varepsilon}(t)=0_E$.

2. En posant $h=t-t_0$, on peut écrire aussi (sous réserve d'existence) : $f'(t_0)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\dfrac{1}{h}\cdot\big(f(t_0+h)-f(t_0)\big)$,

et le développement limité de f au voisinage de t_0 peut s'écrire : $f(t_0+h)\underset{h\to 0}{=} f(t_0)+h\cdot f'(t_0)+\overrightarrow{o}(h)$.

Déf 2:

Soit f une application de I dans E, et $t_0\in I$.

- On dit que f est dérivable à droite en t_0 si $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}}\dfrac{1}{t-t_0}\cdot\big(f(t)-f(t_0)\big)$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_d(t_0)$, et se nomme le vecteur dérivé à droite de f en t_0.
- On dit que f est dérivable à gauche en t_0 si $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}}\dfrac{1}{t-t_0}\cdot\big(f(t)-f(t_0)\big)$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_g(t_0)$, et se nomme le vecteur dérivé à gauche de f en t_0.

Prop 1:

Soit f une application de I dans E, et $t_0\in \overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit dérivable en t_0, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à droite et à gauche en ce point, et que $f'_g(t_0)=f'_d(t_0)$ (et, dans ce cas, $f'(t_0)=f'_g(t_0)=f'_d(t_0)$).

Prop 2:

Si f est dérivable (*resp.* dérivable à gauche, *resp.* dérivable à droite) en t_0, *alors* f est continue (*resp.* continue à gauche, *resp.* continue à droite) en t_0.

Rem : La réciproque de cette propriété est FAUSSE !

Il existe des fonctions continues et non dérivables (on peut même construire des applications continues partout, mais dérivables nulle part !).

Il suffit par exemple de considérer l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$.

f est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ (elle est lipschitzienne de rapport 1), mais elle n'est pas dérivable en 0 (car $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$).

I.2. Cas de la dimension finie

Théorème 1:

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \dots, e_n)$.
Soit f une application de I dans E. Pour tout $t \in I$, on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

où les $f_i : I \to \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f.

Alors, f est dérivable en t_0 si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i est dérivable en t_0, et on a alors :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(t_0) e_i \,.$$

Exemples

1. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si les fonctions $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ le sont, et on a alors $f'(t_0) = (\mathcal{R}e\,(f))'(t_0) + \mathrm{i}(\mathcal{I}m\,(f))'(t_0)$.

2. Une application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]$ les fonctions coefficients $t \mapsto a_{i,j}(t)$ le sont, et dans ce cas la matrice $A'(t_0)$ est la matrice dont les coefficients sont les $a'_{i,j}(t_0)$.

I.3. Dérivabilité sur un intervalle

Déf 3:

Une application $f : I \longrightarrow E$ est dite dérivable sur I si pour tout $t_0 \in I$, f est dérivable en t_0.

Si tel est le cas, on peut définir l'application dérivée de f : $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array} \right.$

L'ensemble des applications dérivables sur I à valeurs dans E sera noté $\mathscr{D}(I, E)$.

Déf 4:

Une application $f : I \longrightarrow E$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est en plus continue sur I.

On notera $\mathscr{C}^1(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans E.

II. Opérations sur les dérivées

Prop 3:

Soient f et g deux applications de I dans E, dérivables en t_0.
Alors l'application $f+g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

Prop 4:

Soit f une application de I dans E, et λ une application de I dans $\mathbb{K}$, dérivables en t_0.
Alors l'application $\lambda.f$ est dérivable en t_0 et $(\lambda.f)'(t_0) = \lambda'(t_0).f(t_0) + \lambda(t_0).f'(t_0)$.
En particulier, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est constant, αf est dérivable en t_0 et $(\alpha f)'(t_0) = \alpha f'(t_0)$.

***Corollaire 4.1*:**

L'ensemble $\mathscr{D}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I,E)$, et l'application $f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathscr{D}(I,E)$ dans $\mathcal{A}(I,E)$.

Théorème 2:

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, et L une application linéaire continue de E dans F.
Si f est dérivable en t_0, $L \circ f$ l'est aussi et : $(L \circ f)'(t_0) = L[f'(t_0)]$

Exemple

Soit $t \mapsto A(t)$ une application dérivable de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors l'application $t \mapsto A^\top(t)$ est dérivable et : $\forall\, t \in I,\ \left(A^\top\right)'(t) = (A')^\top(t)$.
(on applique le théorème précédent avec $L : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$ qui est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie donc continue).

Théorème 3:

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire *continue*.
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$.
Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big).$$

Applications :

1. Soient $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Alors l'application $t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable sur I et :

   $$\forall\, t \in I,\ (MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)\,.$$

   (En effet, l'application $B : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M,N) & \longmapsto & MN \end{array}$ est bilinéaire (propriétés des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.)
2. Soit E un espace préhilbertien réel, muni d'un produit scalaire $(x,y) \in E^2 \mapsto \langle x \,|\, y\rangle \in \mathbb{R}$.
   Ce produit scalaire est une forme bilinéaire continue, car, $\forall\, (x,y) \in E^2,\ |\langle x \,|\, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. la caractérisation de la continuité d'une application bilinéaire dans le chapitre précédent).

Donc, si f et g sont deux applications définies sur I, à valeurs dans E et dérivables, alors l'application :

$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \langle f(t) \,|\, g(t) \rangle \end{array} \right.$ est dérivable, et l'on a : $\langle f \,|\, g \rangle' = \langle f' \,|\, g \rangle + \langle f \,|\, g' \rangle$.

On en déduit ensuite que, si $f : I \longrightarrow E$ est dérivable en t_0 et si $f(t_0) \neq 0$, l'application $t \mapsto \|f(t)\|$ est dérivable en t_0, et $\|f\|'(t_0) = \dfrac{\langle f(t_0) \,|\, f'(t_0) \rangle}{\|f(t_0)\|}$.

3. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 ; l'application $(x, y) \in E^2 \mapsto x \wedge y \in E$ est continue, puisqu'il s'agit d'une application bilinéaire sur un espace vectoriel de dimension finie.

Donc, si f et g sont deux applications définies sur I, à valeurs dans E et dérivables, alors l'application :

$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \wedge g(t) \end{array} \right.$ est dérivable, et l'on a : $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

En adaptant légèrement la démonstration, le théorème précédent est facilement généralisable :

Théorème 4:

Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés, et $M : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire continue.
Pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, soient $f_i : I \longrightarrow E_i$ n applications dérivables sur I.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & M\big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable sur I, et, pour tout $t \in I$:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} M\big(f_1(t), \ldots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \ldots, f_n(t)\big).$$

Applications :

1. Si $f_1, \ldots, f_n$ sont n applications dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, leur produit $g : t \mapsto f_1(t) f_2(t) \cdots f_n(t)$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I,\ g'(t) = f_1'(t) f_2(t) \cdots f_n(t) + f_1(t) f_2'(t) f_3(t) \cdots f_n(t) + \cdots + f_1(t) f_2(t) \cdots f_{n-1}(t) f_n'(t).$$

2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et si $\mathscr{B}$ est une base de E, l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est n-linéaire, donc continue (car E est de dimension finie).

Soit $A : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{array} \right.$ une application dérivable sur I. Si on note $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ les colonnes de la matrice $A(t)$, alors les applications $t \mapsto C_i(t)$ sont dérivables sur I (car leurs fonctions coordonnées le sont). Par suite, l'application $\varphi : t \mapsto \det(A(t))$ est dérivable sur I et :

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det\big(C_1(t), \ldots, C_{i-1}(t), C_i'(t), C_{i+1}(t), \ldots, C_n(t)\big).$$

Exercice d'application

Pour tout réel x, on pose : $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Théorème 5: Fonction composée

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé. Soit $t_0 \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]$$

III. Dérivées successives

Déf 5:

Soit f une application de I dans E. On peut définir par récurrence, si elles existent, les dérivées successives de f de la façon suivante :

- on pose $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre zéro)
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est k fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on pose alors $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ (dérivée d'ordre k).

On notera $\mathscr{D}^n(I,E)$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I à valeurs dans E.

On dira que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I ; on note $\mathscr{C}^n(I,E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur I à valeurs dans E.

Enfin on dira que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on notera $\mathscr{C}^\infty(I,E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans E.

Prop 5:

$\mathscr{D}^n(I,E)$, $\mathscr{C}^n(I,E)$ et $\mathscr{C}^\infty(I,E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{A}(I,E)$.

Si $f,g \in \mathscr{D}^n(I,E)$ et si $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Prop 6:

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1,\dots,e_n)$.

Soit f une application de I dans E. Pour tout $t \in I$, on peut écrire $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$. où les $f_i : I \to \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f.

Alors, f est k-fois dérivable [respectivement de classe $\mathscr{C}^k$] sur I si et seulement si, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, f_i est k fois dérivable [respectivement de classe $\mathscr{C}^k$] sur I, et on a alors : $\forall t \in I, f^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} {f_i}^{(k)}(t)e_i$.

Théorème 6: Formule de Leibniz

Soient E,F,G trois espaces vectoriels normés, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue. Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications n fois dérivables [resp. de classe $\mathscr{C}^n$] sur I .

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B(f(t),g(t)) \end{array} \right.$ est n fois dérivable [resp. de classe $\mathscr{C}^n$] sur I, et on a :

$$\forall t \in I,\ \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\left(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t)\right)$$

***Corollaire 6.1*:**

$\mathscr{D}^n(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{A}(I,\mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire 6.2:

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.
Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I,J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J,E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I,E)$

IV. Rappels indispensables du cours de Sup

On vient ici d'étudier la dérivabilité d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, *à valeurs dans un espace vectoriel normé* quelconque.
Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

IV.1. Théorème des accroissements finis et applications

Théorème 7:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a *intérieur à* I un extrémum local.
Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Rem : Le fait que a est un point intérieur à I est indispensable !! Par exemple, la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule jamais !

Théorème 8: de Rolle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a < b)$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, *à valeurs réelles*, telle que $f(a) = f(b)$.
Alors, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

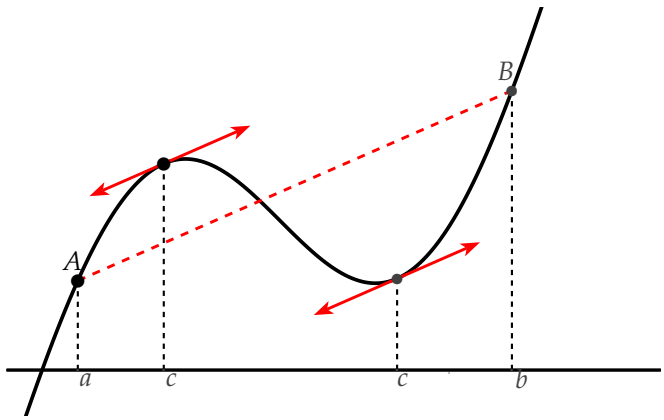
Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a < b)$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, *à valeurs réelles* .
Alors, il existe c appartenant à $]a\,;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Interprétation géométrique :

Le théorème des accroissements finis peut se traduire géométriquement par :

si f est une fonction numérique continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$, il existe (au moins) un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la corde qui joint les points A de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et B de coordonnées $\big(b, f(b)\big)$.



Rem : Le théorème des accroissements finis ne se généralise pas aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\geqslant 2$!
Par exemple, l'application $f\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{it}\end{array}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$, mais il n'existe pas de c tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 10: Prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a < b)$, dérivable sur l'intervalle $]a\,;b]$, à valeurs réelles.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \ell$ existe.
Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.
Rem : on a bien sûr un résultat similaire pour la dérivée à gauche.

Remarques

1. Avec les mêmes notations, si l'on a $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \pm\infty$, la même démonstration permet de conclure que : $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, donc dans ce cas f n'est pas dérivable à droite en a et sa courbe représentative y admet une tangente parallèle à Oy.
2. Si l'on suppose de plus f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b]$, ce théorème montre en plus que f' est continue en a^+ (puisque $f'_d(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$), donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$.
   Le théorème s'appelle alors **théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.**

Exemples

1. Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2. Soit $f\colon x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives en 0.

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles *continue* sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit croissante [*resp.* décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [*resp.* négative] sur $\overset{\circ}{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Si, dans la démonstration qui précède, on suppose $f'(t) > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, on obtient $f(b) > f(a)$; on peut donc énoncer :

Prop 7:

Soit f une fonction à valeurs réelles *continue* sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il *suffit* que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$ [respectivement $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$].

Rem : On notera que cette condition suffisante n'est pas nécessaire !
Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement croissante, bien que sa dérivée s'annule !

On a cependant le résultat suivant :

Théorème 12:

Soit f une fonction à valeurs réelles *continue* sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [respectivement négative] sur $\overset{\circ}{I}$ et que l'ensemble $Z = \left\{ x \in \overset{\circ}{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ des zéros de f' soit d'intérieur vide.

Exemple

La fonction $x \mapsto x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Prop 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}\,.$$

Théorème 13:

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que f' *ne s'annule pas sur* I.
Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Théorème 14: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

La formule de Taylor-Young donne donc l'existence d'un développement limité d'ordre n en a lorsque f est de classe $\mathscr{C}^n$.

Les développements limités des fonctions usuelles sont rappelés en Annexe, ils doivent être parfaitement sus.

Rem : Une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n en un point a sans y être n fois dérivable (pour $n \geqslant 2$ bien sûr).

Exemple : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$.

Alors f admet en 0 le développement limité d'ordre 2 : $f(x) = o(x^2)$.

Cependant, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f'(0) = 0$ (par le théorème de prolongement de la dérivée), donc le rapport $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, c'est-à-dire que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

(où $\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| ,\ x \in [a\,;b] \right\}$).

***Corollaire 15.3*:**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + O\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Rappelons que la notation $O\left((x-a)^{n+1}\right)$ désigne une fonction de la forme $(x-a)^{n+1}\varphi(x)$ où φ est définie et bornée au voisinage de a.

IV.2. Fonctions convexes

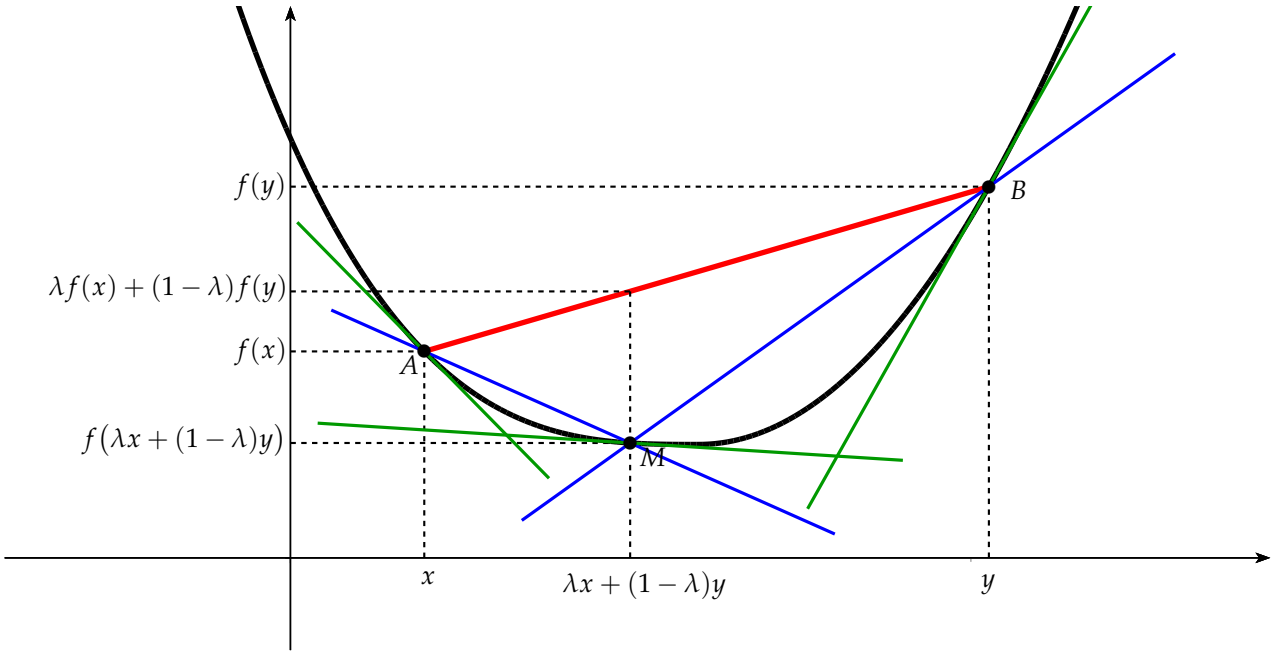
Déf 6:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Une fonction numérique $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$\forall\, (x,y) \in I^2,\ \forall\, \lambda \in [0\,;1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation géométrique :

Dire que f est convexe équivaut à dire que le graphe de sa restriction à un sous-intervalle quelconque $[x\,;y]$ de I est situé au-dessous de la corde joignant les points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(y, f(y)\big)$.



On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On remarque sur la figure que

$$\text{pente}((AM)) \leqslant \text{pente}((AB)) \leqslant \text{pente}((MB)).$$

Cela est justifié dans le lemme suivant.

Lemme: *inégalité des 3 pentes*

Soit f une fonction convexe sur I ; soient $x, y \in I$ avec $x < y$, et $z \in]x\,;y[$. Alors on a les inégalités :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\,.$$

Réciproquement, si l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée pour tout $[x\,;y] \subset I$ et tout $z \in]x\,;y[$, alors f est convexe sur I.

Théorème 16:

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Rem: En reprenant la figure ci-dessus, on a montré au passage (1ère partie de la démonstration) que la pente de la tangente en A est inférieure à celle de la droite (AB), elle-même inférieure à celle de la tangente en B.

***Corollaire 16.4*:**

Pour qu'une fonction numérique f, définie sur un intervalle ouvert I et deux fois dérivable sur I, soit convexe, il faut et il suffit que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

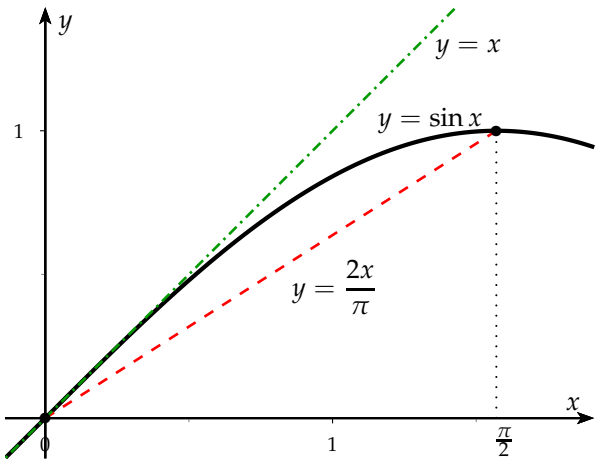
Théorème 17:

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Application à l'obtention de certaines inégalités :
L'étude de la convexité de certaines fonctions permet d'obtenir facilement des inégalités célèbres :

1. $\forall\, x > -1,\ \ln x \leqslant x-1$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x+1$.
3. $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

Ci-dessous, l'interprétation géométrique de la 3ème inégalité :



Pour terminer, donnons la définition suivante :

Déf 7:

Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite concave si la fonction $-f$ est convexe.

Cela équivaut à dire que :
- $\forall\,(x,y) \in I^2,\ \forall\,\lambda \in [0\,;1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
- Pour f dérivable, f' est décroissante (et $f'' \leqslant 0$ pour f deux fois dérivable).
- le graphe de f est situé au-dessus de ses cordes et en-dessous de ses tangentes (pour f dérivable).

Annexe : développements limités usuels (au voisinage de 0

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + O(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!} x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.n!} x^n + O(x^{n+1})$$

(Les développements limités de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ ne sont évidemment pas à retenir par coeur : ils s'obtiennent facilement à partir du développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en prenant respectivement $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$).

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$
$\star \quad \star \quad \star$
$\star \quad \star$
$\star$