Corrigé DM n°3

PROBLÈME 1 :

Rem : Il était tout à fait regrettable que l'énoncé note de la même façon matrice et endomorphisme. Cela pouvait conduire à un certain nombre de confusions.

(A) 1°)
- $\times$ est interne dans $\{P\}$, car $P^2 = P$.
- $\times$ est associative dans $\{P\}$, car, plus g^alt, elle l'est dans $M_n(\mathbb{R})$
- $(\{P\}, \times)$ possède un e^lt neutre : c'est P.
- P est son propre symétrique.

Ainsi $(\{P\}, \times)$ est bien un groupe multiplicatif.

2°) même type de vérifications...

(B) 1) • Soit $X \in \operatorname{Ker} B$ ($X \in \mathbb{R}^n$) : $BX = 0 \Rightarrow ABX = 0 \Rightarrow CX = 0 \Rightarrow X \in \operatorname{Ker} C$

d'où $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} C$.

• Soit $Y \in \operatorname{Im} C$. $\exists X \in \mathbb{R}^n$ tq $Y = CX = ABX = A(BX)$ d'où $Y \in \operatorname{Im} A$.

Donc $\operatorname{Im} C \subset \operatorname{Im} A$.

---

2) D'après la question précédente :

$A = AE \Rightarrow \operatorname{Ker} E \subset \operatorname{Ker} A$

$E = A'A \Rightarrow \operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} E$

d'où $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} E$

---

3) De même :

$A = EA \Rightarrow \operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} E$

$E = AA' \Rightarrow \operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} A$

d'où $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} E$

(C) 1) Par définition de la projection sur U de direction V :

$E(u_i) = u_i$ pour $i \in [\![1, k]\!]$ et $E(v_j) = 0$ pour $j \in [\![k+1, n]\!]$

donc $M_{\mathcal{B}}(E) = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

---

2) a) Soit $A \in H$. Alors $A(U) \subset U$ et $A(V) = \{0\}$, donc $M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $A_1 \in M_k(\mathbb{R})$. De plus, A_1 est la matrice dans $\mathcal{B}_U$, de la restriction de A à $\operatorname{Im} A$, qui est ici un supplémentaire de $\operatorname{Ker} A$; d'après un th. célèbre du cours, cette restriction induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} A$ sur $\operatorname{Im} A$, donc A_1 est inversible.

b) Réciproquement, soit A telle que $M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $A_1 \in GL_k(\mathbb{R})$

On a clairement : $\operatorname{Im} A \subset U$ et $\operatorname{Ker} A \subset V$.

De plus, le rang de A est celui des colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc aussi celui des colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, qui sont linéairement indépendants car celles de A_1 le sont.

Donc $rg\, A = k = \dim U$, d'où $\mathrm{Im}\, A = U$, puis $\mathrm{Ker}\, A = V$ en utilisant le th. du rang.

Ainsi : $\underline{A \in H}$.

---

3) * D'après ce qui précède, si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, on a : $A \in H \Leftrightarrow \exists A_1 \in GL_k(\mathbb{R})$ tq $A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$

On a alors :

- $\underline{\times \text{ interne}}$ dans H car : si $A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ et $B = P \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ avec $A_1, B_1 \in GL_k(\mathbb{R})$ sont deux e^lts de H, alors $AB = P \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ avec $A_1 B_1$ inversible donc $AB \in H$.
- $\underline{\times \text{ est associative}}$ dans $M_n(\mathbb{R})$, donc dans H.
- Soit $E = P \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$. On vérifie facilement que : $\forall A \in H : AE = EA = A$ donc E est $\underline{\text{e}^{\text{lt}} \text{ neutre}}$ de H
- Soit $A \in H$, $A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ avec $A_1 \in GL_k(\mathbb{R})$. Soit alors $A' = P \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$.

On a donc $A' \in H$ et $AA' = A'A = E$, donc A' est le symétrique de A.

Final^t, $(H, \times)$ est un $\underline{\text{groupe multiplicatif de matrices}}$.

* Enfin, il est facile de vérifier que l'application qui à $A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \in H$ associe A_1 est un $\underline{\text{isomorphisme du groupe } (H, \times) \text{ sur le groupe } (GL_k(\mathbb{R}), \times)}$.

---

4) $\underline{a) \Rightarrow b}$: Si $A \in G$ groupe multiplicatif, alors $A^2 \in G$ d'où $\mathrm{Im}\, A^2 = \mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, E$ (d'après B.). Donc $rg(A) = rg(A^2)$

$\underline{b) \Rightarrow c}$: si $rg(A) = rg(A^2)$, puisque $\mathrm{Im}\, A^2 \subset \mathrm{Im}\, A$, on a $\mathrm{Im}\, A^2 = \mathrm{Im}\, A$

$\underline{c) \Rightarrow d)}$: $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, A^2 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A^2$ (d'après le th. du rang).

Puisque $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, A^2$, cela implique $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$.

$\underline{d) \Rightarrow e)}$ Supposons $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$. Soit alors $X \in \mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, A$.

On a : $AX = 0$, et $\exists Y \in \mathbb{R}^n$ tq $X = AY$. D'où : $A^2 Y = AX = 0$ d'où $Y \in \mathrm{Ker}\, A^2$ d'où $Y \in \mathrm{Ker}\, A$ et $X = AY = 0$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, A = \{0\}$, d'où $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A$ à l'aide du th. du rang.

$\underline{e) \Rightarrow a)}$ Supposons $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A$. Soit alors H l'ensemble des matrices

$B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\ker B = \ker A$ et $\mathrm{Im}\,B = \mathrm{Im}\,A$. D'après C3, H est un groupe multiplicatif de matrices, et $A \in H$, d'où a).

D 1) • Si $A \in G_1 \cap G_2$, alors $\ker A = \ker E_1 = \ker E_2$ et $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}\,E_1 = \mathrm{Im}\,E_2$.

Or E_1 et E_2 sont des projections ; on en déduit $E_1 = E_2$ (exercice facile !)

• On a alors : $AA'_1 = E_1 = E_2 \Rightarrow A'_2 A A'_1 = A'_2 E_2 = A'_2$

$\Rightarrow E_2 A'_1 = A'_2$

$\Rightarrow E_1 A'_1 = A'_2 \Rightarrow A'_1 = A'_2$

---

2) • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ On a : $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Vect}(\{e_1, e_2\})$ où $e_1 = (1,2,1)$, $e_2 = (1,2,0)$

Puis : $(x,y,z) \in \ker A \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+4y+2z=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$ donc $\ker A = \mathrm{Vect}(\{e_3\})$ où $e_3 = (0,-1,2)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, on a : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,A \oplus \ker A$, donc A appartient bien à un groupe multiplicatif de matrices.

• Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\{e_1, e_2, e_3\}$.

i.e. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a alors $E = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

et $M_{\mathcal{B}}(A) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $M_{\mathcal{B}}(A') = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

puis $A' = P \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 21 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

PROBLÈME 2 :

I 1) F est un hyperplan de E, et $I \notin F$, donc $E = \mathbb{R}I \oplus F$ (cf. cours).

2) a) Soient $M, M' \in E$. Puisque $E = F \oplus \mathbb{R}I$, il existe $N, N' \in F$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que $M = N + \lambda I$, $M' = N' + \lambda' I$. D'où $MM' = NN' + \lambda' N + \lambda N' + \lambda\lambda' I$.

Or $NN' \in F$ (car F stable par $\times$) et $NN' + \lambda' N + \lambda N' \in F$ (car F s.e.v. de E)

Donc $p(MM') = \lambda\lambda' I = p(M)p(M')$

b) Si $M^2 \in F$, $p(M^2) = 0$. Or $p(M^2) = [p(M)]^2$ d'après ce qui précède.

Si $p(M) = \lambda I$, on a donc $\lambda^2 I = 0$ d'où $\lambda = 0$ d'où $p(M) = 0$. Donc $M \in \ker p = F$.

---

3) • $M_2^2 = 0 = M_3^2$ et $0 \in F$, donc $M_2, M_3 \in F$ d'après ce qui précède.

- $M_1 = M_2 M_3$ et F stable par $\times$, donc $M_1 \in F$
- $M_4 = M_3 M_2$ " " donc $M_4 \in F$.

---

4) Ainsi la famille libre $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ est dans F, alors que $\dim F = 3$: contradiction.

On conclut : $\underline{I \in F}$.

(II) 1) a) $\underline{\varphi(A) \text{ linéaire}}$: on vérifie aisément : $\forall (M,N) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(A)(\lambda M + \mu N) = \lambda\, \varphi(A) M + \mu\, \varphi(A) N.$$

b) • Soient $(A,B) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour toute $M \in E$:

$$\varphi(\lambda A + \mu B)(M) = \lambda\, \varphi(A)(M) + \mu\, \varphi(B)(M) \quad (\text{calcul immédiat !})$$

d'où $\varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda \varphi(A) + \mu \varphi(B)$: $\underline{\varphi \text{ est linéaire de } E \text{ dans } \mathcal{L}(E)}$

• $\forall M \in E$, $\varphi(\lambda I)(M) = \lambda I M - \lambda M I = 0$ d'où $\underline{\varphi(\lambda I) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$

c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\varphi(A) = 0$. Alors : $\forall M \in E$, $\varphi(A)(M) = 0$.

En particulier : $\varphi(A)(M_1) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\underline{b = c = 0}$

et $\varphi(A)(M_2) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\underline{a = d}$

[$\underline{\text{Rem}}$: cf. d'ailleurs un exercice classique fait en classe...]

d) D'après b), $\mathbb{R} I \subset \operatorname{Ker}\varphi$ et d'après c), $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathbb{R} I$.

D'où $\underline{\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R} I}$ et le théorème du rang donne $\underline{\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim E - \dim \operatorname{Ker}\varphi = 3}$ (car $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E))$).

---

2) a) • $D \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{L}(E)} \in D$

• Soient $u, v \in D$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u + \mu v \in D$ car :

$$\forall (M,N) \in E^2,\ (\lambda u + \mu v)(MN) = \lambda u(MN) + \mu v(MN) = \lambda [u(M)N + M u(N)] + \mu [v(M)N + M v(N)]$$
$$= (\lambda u + \mu v)(M) N + M (\lambda u + \mu v)(N)$$

Ainsi, $\underline{D \text{ est bien un s.e.v. de } \mathcal{L}(E)}$.

b) $\forall A \in E$, $\varphi(A) \in D$ car : $\forall (M,N) \in E^2$:

$$\varphi(A)(M) N + M \varphi(A) N = (AM - MA)N + M(AN - NA) = AMN - MAN + MAN - MNA$$
$$= A(MN) - (MN)A = \varphi(A)(MN)$$

Donc : $\underline{\operatorname{Im}\varphi \subset D}$.

---

3) a) Si $u \in D$: $u(I^2) = u(I) I + I u(I) = 2u(I)$ d'où $u(I) = 2u(I)$ et donc $\underline{u(I) = 0}$

b) $M_2^2=0$ d'où $0=u(M_2^2)=u(M_2)M_2+M_2u(M_2)$. En remplaçant dans cette égalité $u(M_2)$ par $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, un rapide calcul donne $z=0$, $t=-x$ soit $u(M_2)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$

c) $M_3^2=0$ d'où $0=u(M_3^2)=u(M_3)M_3+M_3u(M_3)$. On fait comme ci-dessus et on trouve $u(M_3)=\begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$

d) $M_2M_3+M_3M_2=M_1+M_4=I$ donc $u(M_2M_3+M_3M_2)=u(I)=0$

soit $u(M_2)M_3+M_2u(M_3)+u(M_3)M_2+M_3u(M_2)=0$.

En remplaçant alors dans cette égalité $u(M_2)$ et $u(M_3)$ par les valeurs trouvées dans les questions précédentes, on obtient facilement $\underline{y+z=0}$.

e) • Compte tenu des valeurs de a,b,c,d, il est facile de vérifier que :

$\varphi(A)(M_2)=AM_2-M_2A=u(M_2)$ et $\varphi(A)(M_3)=AM_3-M_3A=u(M_3)$

• Or $M_1=M_2M_3$ donc $u(M_1)=u(M_2)M_3+M_2u(M_3)$

De plus, $\varphi(A)\in D$ donc on a aussi $\varphi(A)(M_1)=\varphi(A)(M_2)M_3+M_2\varphi(A)(M_3)$.

On en déduit, sans calcul : $\varphi(A)(M_1)=u(M_1)$.

• De même, $M_4=M_3M_2$ conduit à : $\varphi(A)(M_4)=u(M_4)$

• $\varphi(A)$ et u, linéaires, coïncident donc pour les vecteurs M_1,M_2,M_3,M_4 d'une base de E. Donc $\underline{\varphi(A)=u}$.

---

4) • On avait déjà $\mathrm{Im}\varphi=D$

• Soit $u\in D$. On sait qu'il existe x,y,z,t avec $y+z=0$ tels que $u(M_2)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ et $u(M_3)=\begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$. Il <u>existe</u> alors des réels a,b,c,d tels que

$\begin{cases} a-d=y \\ c=-x \\ b=-t \end{cases}$ (système compatible !). Et, si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $u=\varphi(A)$, donc $u\in\mathrm{Im}\varphi$.

Ainsi, $D\subset\mathrm{Im}\varphi$ et, finalement : $\underline{D=\mathrm{Im}\varphi}$
