

DM N°11 (pour le 23/03/2012)

Le théorème suivant sera admis (théorème de décomposition des noyaux) :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel , $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme *annulateur* de u , et si $P = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}$ est sa décomposition en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$, on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) .$$

L'énoncé figure sur les pages suivantes.

- NOTATIONS -

- n désigne un entier naturel non nul.
- $[n]$ désigne l'ensemble des n premiers entiers non nuls.
- \mathbf{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, \mathbf{R} le corps des nombres réels. et \mathbf{C} le corps des nombres complexes.
- \mathcal{M}_n désigne l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. Son élément neutre pour la multiplication, la matrice identité, est notée $\mathbf{1}_n$.
- \mathcal{P}_n désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs.
- $\mathcal{P}_n^{>0}$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels strictement positifs.
- \mathcal{S}_n désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs et dont les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales à 1, c'est à dire le sous-ensemble de \mathcal{P}_n formé par les matrices $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in [n] \times [n]}$ telles que : $\forall i \in [n], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.
- Soient x et y deux vecteurs de \mathbf{R}^n de coordonnées respectives (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) . On note $x \leq y$ si, pour tout i dans $[n]$, $x_i \leq y_i$.
- Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [n] \times [n]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [n] \times [n]}$ dans \mathcal{P}_n . On note $A \leq B$ si, pour tous entiers i et j dans $[n]$, on a $a_{i,j} \leq b_{i,j}$.

Dans les espaces vectoriels de dimension finie considérés dans ce problème, la notion de limite est relative à l'unique topologie associée à une norme arbitraire sur ces espaces.

- PRÉLIMINAIRES -

Soient t_1, \dots, t_n des nombres réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Soient z_1, \dots, z_n des nombres complexes tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in [n], |z_i| \leq 1, \\ |\sum_{i=1}^n t_i z_i| = 1. \end{cases}$$

On se propose de démontrer qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que, pour tout i dans $[n]$, on ait $z_i = z$.

1. Dans le cas particulier où z_1, \dots, z_n sont des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n t_i z_i = 1$, démontrer que, pour tout i dans $[n]$, on a $z_i = 1$.
2. Démontrer le cas général (*Indication : on pourra, en posant $Z = \sum_{i=1}^n t_i z_i$, considérer la partie réelle du nombre complexe $\sum_{i=1}^n t_i z_i / Z$.*)

- PARTIE I -

Dans cette partie, on suppose $n = 2$.

Soient x, y deux nombres réels; on pose

$$P_{x,y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-x & 1+x \\ 1+y & 1-y \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de $P_{x,y}$ et, pour chaque valeur propre, son sous-espace propre associé. Pour quelles valeurs de (x, y) , la matrice $P_{x,y}$ est-elle diagonalisable?
2. On suppose désormais $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$.

- (a) Démontrer qu'il existe un nombre réel u tel que $-1 < u < 1$ et une matrice inversible U tels que

$$P_{x,y} = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} U.$$

- (b) En déduire que la suite $(P_{x,y}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L . Quel est le rang de L ?

- (c) Démontrer que

$$L = \frac{1}{2+y+x} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 1+y & 1+x \end{pmatrix}.$$

Soit A une matrice dans $\mathcal{P}_2^{>0}$. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

4. Exprimer le discriminant Δ_A du polynôme caractéristique de la matrice A en fonction de a, b, c, d .
5. Démontrer l'inégalité $\Delta_A > 0$.
6. En déduire que A possède deux valeurs propres réelles distinctes. En notant λ_1, λ_2 ces deux valeurs propres numérotées de façon à avoir $\lambda_1 > \lambda_2$, démontrer l'inégalité $\lambda_1 > |\lambda_2|$.
7. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admette une limite lorsque k tend vers $+\infty$. Dans le cas où cette limite existe et n'est pas nulle, que peut-on dire de son rang? Proposer une méthode pour calculer cette limite.
8. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels tels que $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Exhiber une matrice A dans $\mathcal{P}_2^{>0}$ dont les valeurs propres sont λ_1 et λ_2 (*Indication : on pourra commencer par traiter le cas $\lambda_1 = 1$*).

- PARTIE II -

Les matrices de \mathcal{M}_n sont considérées comme des endomorphismes de \mathbf{C}^n . Soit A une matrice de \mathcal{M}_n ; on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A , c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres de A . Si x est un vecteur de \mathbf{C}^n , on notera Ax l'image du vecteur x par l'endomorphisme défini par la matrice A .

II A : On se propose de démontrer l'équivalence :

$$\rho(A) < 1 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0.$$

1. Soit β un nombre complexe tel que $|\beta| < 1$. Soit B une matrice nilpotente dans \mathcal{M}_n , c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel $\ell \geq 1$ tel que $B^\ell = 0$; soit C la matrice $\beta \mathbf{1}_n + B$.
 - (a) Pour tout entier $k \geq \ell$, exprimer C^k en fonction de $\mathbf{1}_n, B, \dots, B^{\ell-1}$.
 - (b) En déduire que la suite $(C^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 0.
2. Soit A dans \mathcal{M}_n .
 - (a) Soit α une valeur propre de A . On pose $F_\alpha = \cup_{k \in \mathbf{N}} \text{Ker}(A - \alpha \mathbf{1}_n)^k$.
 - i. Justifier que F_α est un sous-espace vectoriel de \mathbf{C}^n et que $A(F_\alpha) \subset F_\alpha$.
 - ii. Soit A_α l'endomorphisme de F_α défini par $A_\alpha(x) = Ax$, pour $x \in F_\alpha$. Dans le cas où $|\alpha| < 1$, démontrer que la suite $(A_\alpha^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 0.
 - (b) On suppose $\rho(A) < 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 0.
 - (c) Réciproquement, si la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 0, montrer que le module de toute valeur propre de A est strictement inférieur à 1.

II B :

1. Soit I_A l'ensemble formé par les nombres réels strictement positifs γ tels que la suite $((A/\gamma)^k)_{k \in \mathbf{N}}$ tende vers 0. Démontrer que I_A est l'intervalle $]\rho(A), +\infty[$.
2. On suppose que A admet la valeur propre 1 et qu'il existe deux vecteurs x et y non nuls tels que $Ax = x$ et $Ay = y + x$. Démontrer que la suite $(A^k y)_{k \in \mathbf{N}}$ n'est contenue dans aucune partie compacte de \mathbf{C}^n .
3. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ a pour limite une matrice B non nulle.
 - (a) Démontrer que $\rho(A) = 1$.
 - (b) Soit α une valeur propre de module 1 de A . Démontrer que la suite $(\alpha^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge dans \mathbf{C} et en déduire que $\alpha = 1$.
 - (c) Démontrer que le sous-espace vectoriel F_1 défini à la question IIA2(a) est égal à $\text{Ker}(A - \mathbf{1}_n)$.

- PARTIE III -

Dans la suite du problème, on fait les conventions suivantes :

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [n] \times [n]}$ dans \mathcal{M}_n . Si x est un vecteur de \mathbf{C}^n de coordonnées (x_1, \dots, x_n) , les coordonnées du vecteur Ax sont notées $((Ax)_1, \dots, (Ax)_n)$; autrement dit, pour tout entier i dans $[n]$,

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

On note w le vecteur de \mathbf{C}^n dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

1. Soit $A \in \mathcal{P}_n$. Démontrer que A appartient à \mathcal{S}_n si et seulement si $Aw = w$.
2. Soient A et B dans \mathcal{P}_n (respectivement \mathcal{S}_n). Démontrer que AB est dans \mathcal{P}_n (respectivement \mathcal{S}_n).
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n$.
 - (a) Soit \mathcal{B} l'ensemble formé par les vecteurs v de coordonnées (v_1, \dots, v_n) tels que, pour tout i dans $[n]$, $|v_i| \leq 1$. Démontrer que \mathcal{B} est conservé par A .
 - (b) En déduire que $\rho(A) = 1$.
4. Soit A dans $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$.

- (a) Soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ un vecteur propre associé à une valeur propre α de module 1 de A . Démontrer que les coordonnées de v sont égales et déterminer α . (*Indication : on pourra utiliser une égalité $1 = |\sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{v_j}{v_i}|$ pour v_i non nul convenablement choisi.*)
- (b) Soit v un vecteur de \mathcal{B} tel qu'il existe μ dans \mathbb{C} tel que $Av = v + \mu w$. En considérant la suite $(A^k v)_{k \in \mathbb{N}}$, démontrer que $\mu = 0$.
- (c) Démontrer que 1 est une racine simple du polynôme caractéristique de A .
- (d) Démontrer qu'il existe une matrice U inversible et une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}$ telles que $\rho(B) < 1$ et

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} U.$$

- (e) En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L . Quel est le rang de L ?
- (f) Démontrer que la limite L de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}.$$

où u_1, \dots, u_n sont des nombres réels strictement positifs vérifiant $\sum_{i=1}^n u_i = 1$.

- (g) Démontrer que $\text{Ker } ({}^tA - \mathbf{1}_n)$ est la droite engendrée par le vecteur de coordonnées (u_1, \dots, u_n) .
 - (h) Dans le cas particulier où A et tA sont toutes deux dans \mathcal{S}_n , expliciter L .
5. Soit A dans \mathcal{S}_n .
 - (a) Démontrer que A est la limite d'une suite de matrices de $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$. (*Indication : on pourra remarquer que si A et B sont dans \mathcal{S}_n et si t est un nombre réel dans $[0, 1]$, $tA + (1-t)B$ est dans \mathcal{S}_n .)*)
 - (b) En déduire que tA admet un vecteur propre relatif à la valeur propre 1 dont toutes les coordonnées sont positives.
 - (c) Démontrer sur un exemple que 1 n'est pas en général une racine simple du polynôme caractéristique de A .
 - (d) Démontrer sur un exemple que A peut avoir des valeurs propres de module 1 différentes de 1.

- PARTIE IV -

Dans toute cette partie, on considère une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [n] \times [n]}$, et on suppose que $A \in \mathcal{P}_n^{>0}$.

IV A : On se propose de démontrer que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est une droite engendrée par un vecteur dont les coordonnées sont des nombres réels strictement positifs.

1. Soit x un vecteur non nul de \mathbf{C}^n dont les coordonnées sont des nombres réels positifs. Démontrer que les coordonnées du vecteur Ax sont des nombres réels strictement positifs.
2. Soit α un nombre réel. Supposons que, pour tout i dans $[n]$, on ait $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \alpha$. Démontrer que α est une valeur propre de A et que $\alpha = \rho(A)$.
3. Soit B dans $\mathcal{P}_n^{>0}$ telle que $A \leq B$.
 - (a) Pour tout vecteur x de \mathbf{C}^n dont les coordonnées (x_1, \dots, x_n) sont des nombres réels positifs, démontrer que

$$Ax \leq Bx.$$

- (b) Soit k un entier naturel ≥ 2 . Démontrer que $A^k \leq B^k$.
 - (c) En déduire l'inégalité $\rho(A) \leq \rho(B)$.
4. On pose $\alpha = \min_{i \in [n]} (\sum_{j=1}^n a_{i,j})$. Démontrer que $\alpha \leq \rho(A)$. On pourra considérer la matrice $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [n] \times [n]}$ telle que, pour tous entiers i et j dans $[n]$,

$$b_{i,j} = \frac{\alpha a_{i,j}}{\sum_{k=1}^n a_{i,k}}.$$

5. On pose $\beta = \max_{i \in [n]} (\sum_{j=1}^n a_{i,j})$. Démontrer l'inégalité $\rho(A) \leq \beta$.
6. Soit x un vecteur non nul de \mathbf{C}^n dont les coordonnées (x_1, \dots, x_n) sont des nombres réels strictement positifs. Soient γ et δ deux nombres réels strictement positifs tels que

$$\gamma x \leq Ax \leq \delta x.$$

- (a) Soit S la matrice diagonale :

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

Justifier que S est inversible et déterminer les coefficients de la matrice $S^{-1}AS$.

- (b) En déduire les inégalités $\gamma \leq \rho(A) \leq \delta$.
- (c) Démontrer qu'il existe un indice i dans $[n]$ tel que $(Ax)_i \leq \rho(A)x_i$.
7. Soit x un vecteur non nul de \mathbf{C}^n dont les coordonnées (x_1, \dots, x_n) sont des nombres réels strictement positifs. On suppose que $\rho(A)x \leq Ax$. Démontrer que $Ax = \rho(A)x$ (*Indication : on pourra considérer le vecteur $A(Ax - \rho(A)x)$*).
8. Soit α une valeur propre de A dont le module est égal à $\rho(A)$. Soit v un vecteur propre associé, de coordonnées (v_1, \dots, v_n) , et soit x le vecteur de coordonnées $(|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|)$.
 - (a) Démontrer que x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$.
 - (b) Démontrer que toutes les coordonnées de x sont strictement positives.

- (c) En utilisant la matrice S définie dans la question IVA6a associée à ce vecteur x , démontrer qu'il existe une matrice U inversible et une matrice B telles que $\rho(B) < \rho(A)$ et

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} U.$$

IV B : On étudie le comportement de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

1. Démontrer qu'il existe un unique vecteur y de \mathbb{C}^n ayant pour coordonnées des nombres réels strictement positifs dont la somme est égale à 1 et tel que $Ay = \rho(A)y$. De même, démontrer qu'il existe un unique vecteur z de \mathbb{C}^n ayant pour coordonnées des nombres réels strictement positifs dont la somme est égale à 1 et tel que ${}^tAz = \rho(A)z$.
2. On suppose $\rho(A) = 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers la matrice L ,

$$L = (y_i z_j)_{(i,j) \in [n] \times [n]},$$

où (y_1, \dots, y_n) et (z_1, \dots, z_n) sont respectivement les coordonnées des vecteurs y et z de la question IVB1.

3. On suppose $\rho(A) > 1$. Pour tout entier naturel k , on note $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{(i,j) \in [n] \times [n]}$. Pour tout i et j dans $[n]$, démontrer que la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

- PARTIE V -

Dans cette partie, on prend $n = 3$.

Pour toute matrice B dans \mathcal{M}_3 , $\text{Tr}(B)$ désigne la trace de la matrice B , somme de ses coefficients diagonaux.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [3] \times [3]} \in \mathcal{P}_3^{>0}$. On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les trois valeurs propres complexes de A , distinctes ou confondues, numérotées de telle façon que $\alpha_1 = \rho(A)$.

1. Démontrer les inégalités $\text{Tr}(A) > 0$ et $\text{Tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$. En déduire l'inégalité $3\text{Tr}(A^2) > \text{Tr}(A)^2$.
2. Exprimer $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^2)$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
3. On suppose que l'on a $\alpha_1 = 1$ et que α_2 et α_3 sont deux nombres complexes conjugués $\alpha_2 = re^{it}$ et $\alpha_3 = re^{-it}$ où t et r sont des nombres réels et $0 \leq r < 1$.
 - (a) Démontrer l'égalité $3\text{Tr}(A^2) - \text{Tr}(A)^2 = 2(1 - 2r \cos(t + \frac{\pi}{3}))(1 - 2r \cos(t - \frac{\pi}{3}))$.
 - (b) En déduire que α_2 est à l'intérieur d'un triangle inscrit sur le cercle unité; préciser la nature et les sommets de ce triangle.
4. Réciproquement, posons $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = re^{it}$ et $\alpha_3 = re^{-it}$, où t et r sont des nombres réels et $0 \leq r < 1$. On suppose que α_2 est à l'intérieur du triangle trouvé à la question V3. Démontrer que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les valeurs propres d'une matrice de $\mathcal{P}_3^{>0}$. *Indication : On pourra considérer la matrice :*

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2r \cos(t) & 1 - 2r \cos(t + \frac{\pi}{3}) & 1 - 2r \cos(t - \frac{\pi}{3}) \\ 1 - 2r \cos(t - \frac{\pi}{3}) & 1 + 2r \cos(t) & 1 - 2r \cos(t + \frac{\pi}{3}) \\ 1 - 2r \cos(t + \frac{\pi}{3}) & 1 - 2r \cos(t - \frac{\pi}{3}) & 1 + 2r \cos(t) \end{pmatrix}.$$

5. On admet que, si α_1, α_2 et α_3 sont trois nombres réels qui satisfont aux conditions

$$\alpha_1 = 1, |\alpha_2| < 1, |\alpha_3| < 1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0,$$

il existe une matrice A dans $\mathcal{P}_3^{>0}$ dont les valeurs propres sont α_1, α_2 et α_3 .

Compte tenu de cela et des questions précédentes, décrire l'ensemble \mathcal{S} formé par les triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de \mathbf{C}^3 tels qu'il existe une matrice A dans $\mathcal{P}_3^{>0}$ dont les trois valeurs propres complexes distinctes ou confondues, sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, numérotées de telle façon que $\alpha_1 = \rho(A)$.

————— FIN DU SUJET —————